COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 JUIN 1859.

PRÉSIDENCE DE M. DE SENARMONT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des équations modulaires; par* M. HERMITE. (Suite.)

« III. Plusieurs des résultats précédemment établis s'étendent aux équations plus générales qui fournissent la relation entre les modules pour toutes les transformations des fonctions elliptiques. Ceux que je vais indiquer, en considérant pour l'ordre de la transformation un nombre n impair sans diviseurs carrés, montreront, je pense, l'intérêt qui m'a attaché à ces recherches, auxquelles j'espère donner par la suite de nouveaux développements. Dans ce cas, l'équation rationnelle entre $v=\sqrt[4]{\lambda}$ et $u=\sqrt[4]{k}$ est d'un degré égal à la somme des diviseurs de n, et le premier point que j'ai dû établir consiste en ce que si l'on pose $u=\varphi(\omega)$, les racines seront représentées ainsi :

$$v=\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\omega+16m}{\delta_1}\right),$$

δ et δ_1 étant deux diviseurs de n, de sorte que $n=\delta\delta_1$, m étant pris suivant le module δ_1 et $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ ayant la signification habituelle relative aux nombres composés.

» Considérant ensuite le produit des carrés des différences des racines,

j'ai trouvé qu'en le désignant toujours par D, on avait

$$D = u^{N}(1-u^{8})^{N'}(a_0 + a_1 u^{8} + a_2 u^{16} + \ldots + a_\nu u^{8\nu}),$$

où N, N' et ν sont des nombres entiers dont la détermination dépend des fonctions numériques suivantes, qui s'offrent pour la première fois en analyse.

» Soient δ et δ' deux diviseurs de n tels, que l'on ait

$$\delta^2 \delta' \overline{\gtrless} n,$$

la première de ces fonctions sera la somme de toutes les quantités $\delta^2 \delta'$, et je la désignerai ainsi :

$$\Delta_n = \Sigma \delta^2 \delta'.$$

La seconde Δ'_n sera définie comme la précédente, mais en employant seulement pour δ et δ' les diviseurs de n qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = \left(\frac{2}{\delta'}\right).$$

Cela étant, si $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ représentent la somme et le nombre des diviseurs de n, on aura

$$N = n\mathfrak{N}' - \mathfrak{N} + 2\Delta_n,$$
$$N' = n\mathfrak{N}' - \mathfrak{N} + 2\Delta'_n,$$
$$4\nu = \mathfrak{N}^2 - \mathfrak{N} - \Delta_n - 4\Delta'_n.$$

» Ces quantités auxquelles conduit immédiatement le discriminant de l'équation modulaire montrent donc le premier emploi des fonctions Δ_n, Δ'_n, qui, si on les prend complètes, c'est-à-dire en introduisant dans les sommes tous les diviseurs de n, seront de la nature des fonctions numériques qui ont été récemment l'objet de travaux importants de M. Liouville. Mais la limitation $\delta^2 \delta' \overline{\gtrless} n$ leur imprime un caractère spécial qui rappelle dans la théorie des nombres la notion analytique de *parties de fonctions*. Telle est encore cette expression de la somme des diviseurs de n, moindres que $\sqrt{n}$, dont M. Kronecker a montré le premier l'usage dans le beau travail que j'ai déjà cité. Et il semble jusqu'ici que ce soit dans l'évaluation des sommes de nombres de classes de formes quadratiques, dont les déterminants suivent certaines progressions du second ordre, que ces trois fonctions se trouvent appelées à jouer leur principal rôle ; mais à cet égard j'aurai surtout pour but de faire ressortir, dans le cas où n est premier, la liaison qui existe entre le degré du discriminant et ces nombres de classes. Pour cela, il est nécessaire que je démontre, comme je l'ai déjà annoncé, que le discriminant ne contient pas de facteurs multiples autres que u et $1-u^8$, dont le degré de multiplicité soit supérieur à deux.

» IV. Les valeurs de ω par lesquelles les racines du discriminant, en exceptant $u=0$, $u^8=1$, ont été exprimées sous la forme

$$u=\varphi(\omega),$$

présentent ce caractère que deux quantités $\varphi(\omega)$, $\varphi(\omega')$, sont essentiellement différentes du moment que ω et ω' ne dépendent pas de la même équation; et il en résulte, en premier lieu, que les valeurs communes que prennent respectivement deux racines de l'équation modulaire pour $u=\varphi(\omega)$ et $u=\varphi(\omega')$ ne pourront non plus jamais être égales. Ce point établi, j'observe ensuite que le déterminant Q^2-PR de l'équation $P\omega^2+2Q\omega+R=0$ étant résidu quadratique de n, la congruence $Px^2+2Qx+R\equiv 0 \bmod n$ admet, si P n'est pas multiple du module, deux solutions réelles qu'il sera toujours possible de représenter par des nombres multiples de 16 :

$$x\equiv\mu, \quad x\equiv\mu'.$$

Cela étant, les deux racines de l'équation modulaire, qui deviennent égales lorsqu'on fait $u=\varphi(\omega)$, seront

$$\varphi\left(\frac{\omega-\mu}{n}\right) \text{ et } \varphi\left(\frac{\omega-\mu'}{n}\right).$$

Et dans le cas où l'on suppose $P\equiv 0 \bmod n$, la congruence n'admettant plus qu'une solution $x\equiv\mu$, on aurait l'égalité

$$\varphi\left(\frac{\omega-\mu}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega).$$

Mais on peut toujours faire en sorte d'exclure l'un des cas, de rester dans le premier, par exemple, en tirant l'équation en ω d'une forme quadratique (P, Q, R) où P ne soit pas divisible par n. Cela posé, l'équation modulaire ne saurait présenter non plus, quand on y fait $u=\varphi(\omega)$, une troisième racine $\varphi\left(\frac{\omega-\mu''}{n}\right)$ égale aux précédentes; car μ'' devrait nécessairement vérifier, ainsi que μ et μ', la congruence $Px^2+2Qx+R\equiv 0 \bmod n$, ce qui est impossible lorsqu'on suppose le module un nombre premier. Or, ayant démontré que les racines du discriminant ne différaient pas de l'ensemble des valeurs égales des racines $v_0, v_1, \ldots, v_n$, de l'équation modulaire, nous concluons qu'il n'existe pas de facteurs triples dans le discriminant précisément de ce que trois des quantités $v_0, v_1, \ldots, v_n$, ne peuvent jamais coïncider pour aucune valeur finie de ω. Ayant donc fait

$$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\epsilon}\theta^2(u),$$

nous pouvons regarder comme inégales toutes les racines de l'équation

$\theta(u) = 0$; et c'est la proposition que nous voulions établir afin d'arriver à celle-ci : *Pour tout nombre premier n, la somme des nombres d'équations déduites des classes quadratiques de la première série de déterminants* $-\Delta$, *et de la seconde série de déterminants* $-\Delta'$, *est égale au degré du polynôme* $\theta(u)$. Mais en considérant, pour plus de simplicité, les seules équations qui fournissent des valeurs distinctes de $\varphi^8(\omega)$, nous pouvons remplacer cet énoncé par le suivant :

» *Soient* σ_1 *et* σ_2 *les nombres de classes de la première série auxquelles correspondent deux ou six équations,* σ'_1 *et* σ'_2 *les quantités analogues dans la seconde série, on aura en tenant compte des classes dérivées de* $(1, 0, 1)$ *et* $(2, 1, 2)$, *la relation*

$$2(\sigma_1 + \sigma'_1) + 6(\sigma_2 + \sigma'_2) = \nu = \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{n + \varepsilon}{2}.$$

» Tel est donc le théorème, essentiellement limité jusqu'ici au cas où n est premier, que nous allons vérifier par un certain nombre d'exemples, en donnant pour chacun d'eux la série des équations en ω, ce qui va nous conduire en même temps à présenter des applications des diverses règles énoncées précédemment pour la formation de ces équations.

» V. A cet effet, j'emploierai pour abréger la notation suivante. (A, B, C) étant une forme quelconque, je poserai

$$(C, -B, A) = (A, B, C)_1, \quad (A, -A + B, A - 2B + C) = (A, B, C)_2.$$

Il deviendra possible ainsi de rattacher immédiatement les équations aux formes réduites, par lesquelles il convient d'autant mieux de représenter les classes, qu'on obtiendra de la sorte les coefficients les plus simples et les valeurs de ω pour lesquelles les séries elliptiques présentent la plus grande convergence. Effectivement, si l'on se borne aux équations qui fournissent des valeurs distinctes de $\varphi^8(\omega)$, ou même à la seule équation type (voyez *Comptes rendus*, p. 946), elle sera toujours l'une de celles-ci :

$$(A, B, C) = 0, \quad (A, B, C)_1 = 0, \quad (A, B, C)_2 = 0,$$

les indéterminées x et y étant remplacées par ω et 1, et (A, B, C) étant une forme réduite. Je conviendrai enfin de les désigner seulement par leurs premiers membres et de représenter respectivement par Σ et Σ' pour la première et la seconde série de déterminants, les sommes de nombres d'équations donnant des valeurs distinctes pour $\varphi^8(\omega)$, de sorte que la relation que nous nous proposons de vérifier sera

$$\Sigma + \Sigma' = \nu = \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{n + \varepsilon}{2}.$$

» Cela posé, voici en commençant par les cas les plus simples les résultats que l'on obtient :

$$n = 3.$$

» Le nombre ν se réduit à zéro, $\theta(u)$ est une constante, et le discriminant de l'équation modulaire $u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0$, ainsi que le donne facilement le calcul direct, est

$$D = u^4(1 - u^8)^2.$$

$$n = 5, \quad \nu = 1.$$

» La première série de déterminants fournit la seule valeur $\Delta = 1$, d'où la classe $(1, 0, 1)$, qui par exception donne au lieu de deux équations une seule, $(1, 0, 1)_2$. La seconde série de déterminants n'existe pas, et l'on obtient simplement

$$\theta(u) = 1 + u^8, \quad D = u^6(1 - u^8)^4(1 + u^8)^2.$$

$$n = 7, \quad \nu = 2.$$

» La première série existe seule et donne $\Delta = 3$, d'où les deux classes $(1, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$. Mais on ne doit employer que la classe improprement primitive, qui, par exception encore, au lieu de six équations, n'en donne que deux, dont le type est $(2, 1, 2)$. La valeur D est

$$D = u^8(1 - u^8)^8(1 - u^8 + u^{16})^2.$$

$$n = 11, \quad \nu = 10.$$

» La première série donne $\Delta = 7$, et la classe improprement primitive $(2, 1, 4)$, d'où l'équation type $(2, 1, 4)_1$. On a donc $\Sigma = 2$. Dans la deuxième série $\Delta' = 24$, et l'on obtient les quatre équations types :

$$(1, 0, 24), \quad (3, 0, 8), \quad (4, 2, 7)_1, \quad (5, 1, 5)_2,$$

de sorte que $\Sigma' = 8$, $\Sigma + \Sigma' = 10$.

» On verra dans un prochain article comment on parvient ensuite à l'expression :

$$\begin{aligned} D = u^{12}(1 - u^8)^{10}(16 - 31u^8 + 16u^{16})^2 \\ \times (1 - 301960u^8 + 3550492u^{16} + 19797821768u^{24} + 13017608u^{32} \\ + 19797821u^{40} + 3550492u^{48} - 301960u^{56} + u^{64})^2. \end{aligned}$$

» Pour les valeurs plus grandes de n, je résumerai les résultats dans le tableau suivant :

n	PREMIÈRE SÉRIE.	DEUXIÈME SÉRIE.	ν
13	$\Delta = 3$ $(2, 1, 2)$ $\Delta = 9$ $(1, 0, 9)_2\ (2, 1, 5)_1$ $(3, 0, 3)_2$ $\Sigma = 7$	$\Delta' = 40$ $(1, 0, 40)\ (5, 0, 8)\ (4, 2, 11)_1$ $(7, 3, 7)_2$ $\Sigma' = 8$	15
17	$\Delta = 13$ $(1, 0, 13)_2\ (2, 1, 7)_1$ $\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 8$	$\Delta' = 72$ $(1, 0, 72)\ (3, 0, 24)\ (8, 0, 9)_1\ (4, 2, 19)_1$ $(9, 3, 9)_2\ (8, 4, 11)_1$ $\Delta' = 16$ $(1, 0, 16)\ (2, 0, 8)\ (4, 2, 5)_1$ $(4, 0, 4)_2$ $\Sigma' = 19$	27
19	$\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Delta = 21$ $(1, 0, 21)_2\ (3, 0, 7)_2$ $(2, 1, 11)_2\ (5, 2, 5)_2$ $\Sigma = 12$	$\Delta' = 88$ $(1, 0, 88)\ (8, 0, 11)_1\ (4, 2, 23)_1\ (8, 4, 13)_1$ $\Delta' = 48$ $(1, 0, 48)\ (2, 0, 24)\ (3, 0, 16)\ (4, 0, 12)$ $(6, 0, 8)\ (7, 1, 7)_2\ (4, 2, 13)_1\ (8, 4, 8)$ $\Sigma' = 24$	36
23	$\Delta = 19$ $(2, 1, 10)$ $\Delta = 33$ $(1, 0, 33)_2\ (3, 0, 11)_2$ $(2, 1, 17)_1\ (6, 3, 7)_1$ $\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1\ (4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 18$	$\Delta' = 112$ $(1, 0, 112)\ (2, 0, 56)\ (4, 0, 28)_2\ (8, 0, 14)_1$ $(7, 0, 16)\ (4, 2, 29)_1\ (11, 3, 11)_2\ (8, 4, 16)$ $\Delta' = 120$ $(1, 0, 120)\ (3, 0, 40)\ (5, 0, 24)\ (8, 0, 15)_1$ $(11, 1, 11)_2\ (4, 2, 31)\ (8, 4, 17)_1\ (12, 6, 13)_1$ $\Sigma' = 36$	54
29	$\Delta = 25$ $(1, 0, 25)_2\ (2, 1, 3)_1$ $(5, 0, 5)_2$ $\Delta = 51$ $(2, 1, 26)\ (6, 3, 10)$ $\Delta = 45$ $(1, 0, 45)_2\ (3, 0, 15)_2\ (5, 0, 9)_2$ $(2, 1, 23)_1\ (7, 2, 7)_2\ (6, 3, 9)_1$ $\Delta = 7$ $(2, 1, 4)_1$ $\Sigma = 31$	$\Delta = 120$ $(1, 0, 120)\ (3, 0, 40)\ (5, 0, 24)\ (8, 0, 15)_1\ (11, 1, 11)_2\ (4, 2, 32)_1$ $(8, 4, 17)_1\ (12, 6, 13)_1$ $\Delta = 208$ $(1, 0, 208)\ (2, 0, 104)\ (4, 0, 52)\ (8, 0, 26)_1\ (13, 0, 16)$ $(11, 1, 29)_2\ (11, -1, 29)_2\ (7, 3, 31)_2\ (7, -3, 31)_2\ (4, 2, 53)_1\ (8, 4, 28)_1$ $(16, 8, 17)_1\ (14, 4, 16)\ (14, -4, 16)$ $\Delta = 168$ $(1, 0, 168)\ (8, 0, 21)_1\ (3, 0, 56)\ (7, 0, 24)\ (13, 1, 13)_2\ (4, 2, 43)_1$ $(8, 4, 23)_1\ (12, 6, 17)_1$ $\Sigma' = 60$	91

CHIMIE ORGANIQUE. — *Faits pour servir à l'histoire des bases organiques;* *par* **M. A.-W. Hofmann.**

« Dans une communication précédente (1), j'ai fait connaître les résultats qu'on obtient en soumettant la phénylamine à l'action du dibromure d'éthylène. Le produit principal de cette réaction est une substance bien cristallisée, douée de propriétés basiques. L'analyse de ce corps et de ses combinaisons m'avait conduit aux rapports simples

$$C^{16}H^9Az = \left\{\begin{matrix}(C^4\ H^4)''\\ C^{12}H^5\end{matrix}\right\}Az;$$

mais l'action de l'iodure méthylique et éthylique sur la matière nouvelle ayant donné naissance aux combinaisons

$$C^{34}H^{21}Az^2I = \left\{\begin{matrix}C^{16}H^9Az\\ C^{16}H^9Az\end{matrix}\right\}C^2H^3I,$$

$$C^{36}H^{23}Az^2I = \left\{\begin{matrix}C^{16}H^9Az\\ C^{16}H^9Az\end{matrix}\right\}C^4H^5I,$$

j'étais porté à doubler le terme précédent et à admettre la formule

$$C^{32}H^{18}N^2 = \left\{\begin{matrix}(C^4\ H^4)^{2''}\\ (C^{12}H^5)^2\end{matrix}\right\}Az^2,$$

comme expression moléculaire de la nouvelle base. La matière dérive donc de deux molécules d'ammoniaque, dont 2 équivalents d'hydrogène sont remplacés par le phényle et 4 équivalents d'hydrogène par deux molécules diatomiques d'éthylène; c'est la diphényl-diamine diéthylénique. Cette manière de voir présuppose l'existence d'une base

$$C^{28}H^{16}Az^2 = \left\{\begin{matrix}(C^4\ H^4)''\\ (C^{12}H^5)^2\\ H^2\end{matrix}\right\}Az^2,$$

c'est-à-dire de la diphényl-diamine monoéthylénique

» L'expérience n'a pas manqué de réaliser cette prévision. Un mélange de dibromure d'éthylène avec un grand excès de phénylamine maintenu en

(1) *Comptes rendus*, t. XLVII, p. 453.

ébullition pendant une demi-heure, ne tarde pas à se prendre en masse. Traitée par l'eau, cette masse se sépare en bromure de phényl-ammonium, qui se dissout, et une substance résineuse qui ne se solidifie qu'imparfaitement. Cette substance est la base cherchée. On l'obtient à l'état de pureté en la transformant en chlorure difficilement soluble dans l'acide chlorhydrique concentré et qu'on purifie par des cristallisations successives dans l'alcool bouillant. Le chlorure dissous dans l'eau et décomposé par la potasse fournit la base libre; elle se sépare à l'état d'huile qui ne tarde pas à se solidifier et qu'une simple cristallisation dans l'alcool dilué rend absolument pure.

» L'analyse de cette matière m'a conduit en effet à la formule

$$C^{28}H^{16}Az^2 = \left.\begin{matrix}(C^4H^4)'' \\ (C^{12}H^5)^2 \\ H^2\end{matrix}\right\} Az^2,$$

expression qu'on a vérifiée par l'examen d'un chlorure bien cristallisé

$$\left[\left.\begin{matrix}(C^4H^4)'' \\ (C^{12}H^5)^2 \\ H^4\end{matrix}\right\} Az^2\right]'' Cl^2$$

et du sel platinique

$$\left[\left.\begin{matrix}(C^4H^4)'' \\ (C^{12}H^5)^2 \\ H^4\end{matrix}\right\} Az^2\right]'' Cl^2, 2PtCl^2.$$

» La formation de la diphényl-diamine monoéthylénique s'exprime par l'équation suivante :

$$4\left(\left.\begin{matrix}C^{12}H^5 \\ H^2\end{matrix}\right\} Az\right) + (C^4H^4)''Br^2 = \left.\begin{matrix}(C^4H^4)'' \\ (C^{12}H^5)^2 \\ H^2\end{matrix}\right\} Az^2 + 2\left[\left(\left.\begin{matrix}C^{12}H^5 \\ H^3\end{matrix}\right\} Az\right) Br\right].$$

» La combinaison monoéthylénique se distingue du corps diéthylénique, que j'ai décrit antérieurement, par l'ensemble de ses propriétés. La première est très-soluble dans l'alcool et l'éther, tandis que le dernier ne se dissout que difficilement dans ces dissolvants. Le point de fusion de la combinaison monoéthylénique est 57 degrés. Le corps diéthylénique ne fond qu'à 157 degrés.

» Pour établir d'une manière définitive la relation qui existe entre ces

deux corps, il restait à transformer la base monoéthylénique en base diéthylénique, par l'action du dibromure d'éthylène. Cette expérience réussit sans difficulté en chauffant le mélange de la base et du dibromure d'éthylène en présence d'alcool au bain-marie. Il se forme le dibromure de la base monoéthylénique, et la diphényl-diamine diéthylénique à l'état libre :

$$\left[\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)''\\(C^{12}\,H^5)^2\\H^2\end{matrix}\right\}Az^2\right]+(C^4\,H^4)''\,Br^2=\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)^{2''}\\(C^{12}\,H^5)^2\end{matrix}\right\}Az^2+\left[\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)''\\(C^{12}\,H^5)^2\\H^4\end{matrix}\right\}Az^2\right]''Br^2.$$

La phénylamine renfermant le radical d'un alcool aromatique, j'ai examiné, pour compléter cette recherche, l'action du dibromure d'éthylène sur l'éthylamine, comme prototype des monamines primaires à radical d'alcool ordinaire.

» Le dibromure d'éthylène attaque l'éthylamine, même à la température ordinaire. Les produits de la réaction varient avec les proportions relatives des deux corps et avec la température; mais ils renferment toujours deux bromures correspondants aux sels des dérivés de la phénylamine, savoir :

$$C^{12}\,H^{18}\,Az^2\,Br^2=\left[\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)''\\(C^4\,H^5)^2\\H^4\end{matrix}\right\}Az^2\right]''Br^2,$$

$$C^{16}\,H^{20}\,Az^2\,Br^2=\left[\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)^{2''}\\(C^4\,H^5)^2\\H^2\end{matrix}\right\}Az^2\right]''Br^2.$$

J'ai fixé la nature de la première base par l'analyse du dichlorure, du dibromure et de la base libre. Ce sont des composés remarquables par leur cristallisation. La base libre est une matière solide très-caustique, d'une odeur d'ammoniaque très-prononcée, ressemblant à l'acide stéarique. Elle renferme

$$C^{12}\,H^{18}\,Az^2\,O^2=\left[\left.\begin{matrix}(C^4\,H^4)''\\(C^4\,H^5)^2\\H^4\end{matrix}\right\}Az^2\right]''O^2;$$

c'est donc l'oxyde d'un métal diatomique, l'*éthylène diéthyl-diammonium*. La seconde base est un liquide visqueux, qui bout à 185 degrés; elle forme des sels très-solubles, mais le sel platinique ne se dissout que difficilement, et peut être obtenu bien cristallisé. La base diéthylénique s'obtient très-faci-

lement par l'action du dibromure d'éthylène sur la combinaison monoéthylénique.

» La base diéthylénique, soumise de nouveau à l'action du dibromure d'éthylène, ne tarde pas à se prendre en masse. J'ai aussi examiné l'action du dibromure et du dichlorure d'éthylène sur la diéthylamine et la triéthylamine; mais les résultats que j'ai obtenus dans quelques-unes de ces réactions, s'éloignant d'une manière bien inattendue des indications de la théorie, l'examen de ces réactions sera, de ma part, l'objet d'une communication spéciale. »

M. **Lecoq**, récemment nommé à une place de Correspondant pour la Section de Botanique en remplacement de feu *M. A. Bonpland,* adresse de Clermont (Puy-de-Dôme) ses remercîments à l'Académie.

M. **Lebesgue**, Correspondant de l'Académie, lui fait hommage de la première partie de l'ouvrage qu'il publie sous le titre d'*Exercices d'Analyse numérique*.

Les différentes parties réunies formeront un Traité de la Théorie des Nombres.

MÉMOIRES LUS.

MÉTÉOROLOGIE. — *Mémoire sur la sécheresse de* 1858 *et sur les crues et diminutions de la Seine depuis cent quarante ans; par* M. **Barral**.

(Commissaires, MM. Boussingault, Peligot, Decaisne.)

« Du Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, il résulte, dit l'auteur, les faits suivants :

» 1°. Les eaux de la Seine sont descendues au niveau le plus bas qu'elles aient jamais atteint jusqu'à ce jour (à $0^m,35$ au-dessous du zéro de l'échelle du pont de la Tournelle, établi en 1719, pour les basses eaux de cette année.

» 2°. La hauteur moyenne des eaux de la Seine pour 1858 a atteint le chiffre le plus bas qu'on ait calculé depuis les observations régulières commencées en 1732, et poursuivies depuis cette époque. Cette hauteur moyenne n'a été que de $0^m,34$, la hauteur moyenne générale étant de $1^m,225$ d'après 126 années d'observations.

» 3°. Les plus hautes eaux de 1858 se rangent aussi parmi les plus faibles

observées ; elles n'ont été que de $2^m,85$; on a observé $7^m,90$ le 26 décembre 1740, et il paraîtrait qu'on a eu $8^m,93$ le 11 juillet 1615.

» 4°. La quantité de pluie tombée à Paris en 1858 a été à peine inférieure à la moyenne annuelle. Mais, en prenant la moyenne générale de la France, calculée du moins d'après les observations de 13 départements, savoir : Nord, Moselle, Bas-Rhin, Seine, Loire-Inférieure, Ain, Haute-Loire, Gironde, Vaucluse, Hérault, Haute-Garonne, Bouches-du-Rhône, Pyrénées-Orientales, on trouve que la diminution des pluies a été de 21 pour 100 sur une année moyenne.

» 5°. L'absence de neige pendant l'hiver 1857-1858 doit être considérée comme la cause principale de l'abaissement extraordinaire de l'eau dans les cours d'eau.

» 6°. La sécheresse de 1858 a frappé particulièrement les récoltes fourragères et les récoltes provenant des semailles de printemps; elle a été cause d'une grande diminution dans l'entretien du bétail par les exploitations rurales. Les récoltes des céréales d'automne, des arbres fruitiers et de la vigne ont été bonnes.

» 7°. J'ai pu former un recueil complet des observations journalières des crues et diminutions de la Seine depuis 1732 jusqu'à 1858, sauf l'année 1776, dont les observations n'ont pu être retrouvées jusqu'à ce jour. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. le Ministre de l'Instruction publique transmet un Mémoire sur la navigation aérienne que l'auteur, *M. Ant. Rovero*, lui a adressé de Villaviciosa (Asturies), en le priant de le soumettre à l'Académie des Sciences.

Ce Mémoire, qui est accompagné d'une figure de l'appareil, et auquel est jointe une traduction française du texte espagnol, est renvoyé à l'examen de la Commission précédemment nommée pour les diverses communications relatives à l'aéronautique, avec invitation de faire connaître le jugement qu'elle aura porté, afin que ce jugement puisse être porté à la connaissance de M. le Ministre, ainsi qu'il en exprime le désir dans la Lettre d'envoi.

L'Académie renvoie à la même Commission un Mémoire adressé de Villeneuve-Saint-Georges (Seine-et-Oise) par *M. Vaussin-Chardanne*. Ce manuscrit, qui a pour titre « Mémoire sur l'aérostation mixte, » est annoncé comme formant le complément d'une publication précédente de l'auteur

intitulée : « L'aérostation sérieuse mise à la portée de tous ». L'auteur a joint à cet envoi trois exemplaires de cette brochure et diverses pièces imprimées concernant les jugements portés sur cette invention.

L'Académie reçoit une pièce destinée au concours pour le grand prix de Mathématiques de 1860, question concernant l'équation ou les équations différentielles des surfaces applicables sur une autre surface. Ce Mémoire, qui porte le nom de l'auteur sous pli cacheté, a été inscrit sous le n° 1.

CORRESPONDANCE.

M. **Flourens** met sous les yeux de l'Académie une première épreuve d'un portrait de *F. Arago,* gravé par les soins de M. Gide, et destiné à être placé en tête des Œuvres de l'illustre Secrétaire perpétuel.

M. **Flourens** présente, au nom de *M. M. Paolini*, professeur de physiologie à l'Université de Bologne, un Mémoire relatif à de nouvelles expériences faites par l'auteur sur la *moelle épinière,* expériences qu'il résume dans les propositions suivantes :

« 1°. Les cordons postérieurs et latéraux de la moelle épinière sont doués d'une sensibilité exquise.

» 2°. La division de ces cordons n'empêche pas la transmission à l'encéphale des impressions sensitives.

» 3°. Les impressions transmises par les racines spinales postérieures, après un court trajet à travers les fibres médullaires de ces cordons, passent dans la substance grise.

» 4°. La substance grise, quoique insensible par elle-même, c'est-à-dire incapable de recevoir immédiatement les impressions excitatrices du sentiment, paraît le moyen indispensable pour le transport de ces impressions au sensorium commun.

» 5°. Les seuls cordons postérieurs, étant coupés transversalement, la sensibilité des parties de l'animal, situées au-dessous de la section, augmente temporairement.

» 6°. Les cordons postérieurs conservent leur propre sensibilité, bien que coupés en deux ou trois points, à une certaine distance l'un de l'autre.

» 7°. Les cordons antérieurs sont insensibles à l'application immédiate des stimulus.

» 8°. Enfin, ces cordons antérieurs sont essentiellement moteurs, mais ne semblent pas étrangers à la production du sentiment. »

M. **Flourens** signale encore parmi les pièces imprimées de la correspondance un opuscule concernant des expériences physiologiques sur la *transmission de la sensibilité et du mouvement dans la moelle épinière*. L'auteur, M. Van Kempen, professeur à l'Université de Louvain, a répété les expériences faites depuis quelques années par divers physiologistes et en a institué qui lui sont propres. Les résultats auxquels il est arrivé sont résumés par lui dans les termes suivants :

« I. Chez la *Grenouilles*, la transmission de la *sensibilité consciente* est croisée dans toute la longueur de la moelle épinière ; celle du *mouvement*, au contraire, est *directe* dans la portion lombo-dorsale, et croisée dans sa portion cervicale.

» II. Chez les *Pigeons*, l'entre-croisement des conducteurs de la *sensibilité consciente* a lieu dans toute la longueur de la moelle épinière. La transmission du *mouvement volontaire* est *directe* dans la région lombo-dorsale ; elle est au contraire *croisée partiellement* dans la région cervicale.

» III. Chez les *Mammifères*, la propagation de la *sensibilité consciente* est *croisée* dans toute la longueur de la moelle épinière. La transmission du *mouvement volontaire* est seulement *directe* dans la région lombo-dorsale ; à la région cervicale, elle est *en partie croisée*, et la plus grande partie y est encore *directe*, puisque dans nos expériences le membre postérieur du côté opéré était plus paralysé que celui du côté opposé (1). »

M. **le Secrétaire perpétuel** présente, au nom de *M. Volpicelli*, un quatrième Mémoire « Sur la polarité électrostatique » ;

Et au nom de la Société archéologique de Constantine une Notice sur un *crâne fossile de buffle* qui figure aujourd'hui dans le musée de cette ville. Ce débris, qui provient d'un animal de très-grande taille, a été trouvé en mars 1859, après une forte crue du Rummel, qui le mit à découvert, sur la rive gauche, près de la route de Sétif, à 24 kilomètres sud-ouest de Constantine. La description faite par *M. Ollivier* est accompagnée de figures photographiques qui représentent cette portion de crâne sous trois aspects différents.

---

(1) *Voyez*, sur cette Note et sur la précédente, les expériences de M. Brown-Séquard et celles de M. Schiff.

La Société impériale des Naturalistes de Moscou adresse les nos 2 et 3 de son *Bulletin* pour l'année 1858.

CHIMIE. — *Nouvelles recherches sur l'acide lactique; par* **M. Ad. Wurtz.**

« Ayant obtenu de l'acide lactique par l'oxydation lente du propylglycol, j'ai pensé que ces deux corps offraient entre eux les mêmes relations que celles qui rattachent l'acide acétique à l'alcool, et que l'acide lactique devait être envisagé comme un acide bibasique de la forme

$$\left.\begin{matrix} Ɵ^3H^4Θ \\ H^2 \end{matrix}\right\} Θ^2 \ (*).$$

Les faits que je vais exposer viennent à l'appui de cette manière de voir, en ce qui concerne la nature bibasique de l'acide lactique. J'ai réussi en effet à former l'éther lactique bibasique $\left.\begin{matrix} Ɵ^3H^4Θ \\ (C^2H^5) \end{matrix}\right\} Θ^2$ dans lequel 2 équivalents d'hydrogène de l'acide lactique sont remplacés par 2 équivalents d'éthyle.

» *Éther lactique.* — Pour préparer cet éther, on fait réagir sur l'éthylate de soude l'éther chlorolactique, composé que j'ai obtenu en traitant le chlorure de lactyle par l'alcool et dont l'identité avec l'éther chloropropionique vient d'être démontrée par M. Ulrich.

» La réaction s'accomplit de la manière suivante :

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} Ɵ^3H^4Θ \\ C^2H^5 \end{matrix}\right\} Θ \atop Cl}_{\text{Ether chlorolactique.}} + \left.\begin{matrix} C^2H^5 \\ Na \end{matrix}\right\} Θ = \underbrace{\left.\begin{matrix} Ɵ^3H^4Θ \\ (Ɵ^2H^5)^2 \end{matrix}\right\} Θ^2}_{\text{Ether lactique.}} + ClNa$$

» Elle indique les relations intimes qui existent entre l'éther chlorolactique et l'éther lactique et par conséquent l'acide lactique lui-même.

» A l'état de pureté, l'éther lactique constitue un liquide transparent, mo-

---

(*) $Ɵ = 12;\ H = 1;\ Θ = 16.$

Je barre les symboles Ɵ et Θ du carbone et de l'oxygène : 1° pour marquer la nature polyatomique de ces éléments; 2° pour faciliter le passage de cette notation à la notation ancienne. Pour effectuer ce passage, il suffit, en effet, de multiplier par 2 les coefficients des lettres barrées.

bile, doué d'une odeur agréable; il bout à 156°,5 sous la pression de $0^m,757$. Sa densité à 0 degré est de 0,9203. Sa densité de vapeur a été trouvée par l'expérience égale à 5,052. La densité de vapeur calculée serait de 5,054 pour une condensation en 2 volumes (*).

» Il a donné à l'analyse les résultats suivants :

	Expériences. I.	II.	III.		Théorie.
Carbone.......	57,86	57,17	57,17	C^7.....	57,53
Hydrogène.....	9,67	9,60	9,85	H^{14}.....	9,59
Oxygène.......	»	»	»	O^3.....	32,88
					100,00

Ces nombres s'accordent avec la formule

$$C^7H^{14}O^3 = \left\{ \begin{matrix} C^3H^4O \\ (C^2H^5)^2 \end{matrix} \right\} O^2,$$

confirmée d'ailleurs par la densité de vapeur du produit. L'éther lactique est insoluble dans l'eau, à la surface de laquelle il forme une couche oléagineuse. Lorsqu'on sature d'ammoniaque une solution alcoolique d'éther lactique et qu'on chauffe la liqueur pendant plusieurs jours au bain-marie, l'ammoniaque réagit sur les éléments de l'éther lactique et il se forme une amide. Ce corps cristallise en belles lames, brillantes, fusibles, solubles dans l'eau et dans l'alcool. D'après une analyse que j'en ai faite, ces cristaux constituent le lactaméthane ou l'éther lactamique

$$C^5H^{11}AzO^2 = \left\{ \begin{matrix} [C^3H^4O]''H^2Az \\ C^2H^5 \end{matrix} \right\} O,$$

qui est à l'acide lactique $\left\{ \begin{matrix} C^3H^4O \\ H^2 \end{matrix} \right\} O^2$ ce que l'oxaméthane ou l'éther oxamique $\left\{ \begin{matrix} [C^2O^2]''H^2Az \\ C^2H^5 \end{matrix} \right\} O$ (Balard) est à l'acide oxalique $\left\{ \begin{matrix} C^2O^2 \\ H^2 \end{matrix} \right\} O^2$. Je reviendrai sur cette amide dans une autre communication.

» On connaît des lactates de la forme $\left\{ \begin{matrix} C^3H^4O \\ M^2 \end{matrix} \right\} O^2$ dans lesquels 2 atomes d'hydrogène sont remplacés par 2 atomes de métal (**). Mais il est

(*) $H^2O = 18 = 2$ volumes.

(**) ENGELHARDT et MADDRELL, BRÜNING. *Annalen der Chemie und Pharmacie*; t. CIV, p. 192.

vrai de dire que le second atome d'hydrogène basique de l'acide lactique ne s'échange que difficilement contre un atome de métal, particularité qu'on remarque également avec l'acide salicylique bibasique. J'ai pensé que ce second atome d'hydrogène basique pourrait être échangé facilement contre un radical d'acide. Il en est ainsi : en faisant réagir l'éther chlorolactique sur une solution alcoolique de butyrate de potasse, j'ai obtenu un composé éthéré que j'envisage comme l'éther de l'acide lactobutyrique $\left\{\begin{matrix}[C^3H^4O]'' \\ [C^3H^7O]' \\ H\end{matrix}\right\} O^2$ dérivé de l'acide lactique par la substitution d'un atome de butyryle à un atome d'hydrogène. L'éther lactobutyrique se forme en vertu de la réaction suivante :

$$\underbrace{\left.\begin{matrix}[C^3H^4O]'' \\ [C^2H^5]' \\ Cl\end{matrix}\right\} O}_{\text{Ether chlorolactique.}} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}[C^4H^7O]'' \\ K\end{matrix}\right\} O}_{\text{Butyrate de potasse.}} = Cl\,K + \underbrace{\left\{\begin{matrix}[C^3H^4O]'' \\ [C^4H^7O]' \\ [C^2H^5]'\end{matrix}\right\} O^2}_{\text{Ether lactobutyrique.}}$$

» Cet éther constitue un liquide oléagineux insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool, doué d'une odeur rappelant celle de l'acide butyrique, d'une densité de 1,024 à 0 degré. Il bout à 208 degrés. Sa densité de vapeur a été trouvée égale à 6,731. La densité de vapeur théorique serait de 6,509 pour une condensation en 2 volumes.

» Il a donné à l'analyse les nombres suivants :

	Expériences.				Théorie.
	I.	II.	III.		
Carbone......	56,89	57,93	57,01	C....	57,44
Hydrogène ...	8,52	8,41	8,76	H	8,51
Oxygène	»	»	»	O....	34,05
					100,00

» Je regarde l'acide lactobutyrique comme l'analogue des acides benzoglycolique et benzolactique de MM. Strecker et Socoloff. »

A 4 heures, l'Académie se forme en comité secret.

La séance est levée à 5 heures. F.